

Neue Wege zur statistischen Beurteilung – realisiert in EXCEL¹

Zusammenfassung: Beurteilende Statistik wird als schwierig empfunden. Wegen ihrer Bedeutung für ein sinnvolles Management mit dem Begriff „Restrisiko“, der im Zusammenhang mit unvollständiger Information – Information, die nur auf begrenzten Daten und Annahmen basiert – überall durchschimmert, tun allgemeinere Wege der statistischen Beurteilung als Abkürzungen zur Beurteilenden Statistik not. Solche Abkürzungen – wie sie hier dargestellt und in EXCEL eingebettet werden – ermöglichen einen intuitiven „Kurzschluss“ von statistischen Aussagen, der ein verständiges Anwenden formaler Ergebnisse auf ein Sachproblem ermöglicht.

Einleitung

Beurteilende Statistik liegt im Brennpunkt von Kontext, aus dem ein Problem stammt, Logik des induktiven Schließens, einer Hülle für „statistisches Restrisiko“, sowie von mathematischen Methoden, die zur Herleitung der Verfahren in „irgendeinem“ optimalen Sinne dienen. Dementsprechend gilt Beurteilende Statistik als schwierig. Im Folgenden sollen Abkürzungen zur Beurteilenden Statistik, oder besser zu einer statistischen Beurteilung angesprochen werden, die allesamt ein vertieftes Verständnis der Methoden wie auch der damit in konkreten Problemen ermöglichten Lösungsansätze anbahnen können.

Im ersten Abschnitt zur Modellierung eines Kontexts wird eine hautnahe Interpretation des Korrelationskoeffizienten wiedergegeben, die eine sachgemäße Einschätzung von dessen Größe weit über das üblicherweise angestrebte Ziel „der Korrelationskoeffizient ist signifikant von Null verschieden, das bedeutet die in den Daten gefundenen Zusammenhänge sind statistisch abgesichert“ hinausweisen. Und das mit einfachsten, konkreten Mitteln – also eine Abkürzung, wie angedeutet.

Im zweiten Abschnitt wird die Möglichkeit der Simulation von stochastischen Annahmen über einen Kontext ausgenutzt, um die Folgen des Zufalls – in der vorgegebenen Form – zu illustrieren. Zur Kontrastierung wird dies hier „Sampling“ genannt, d.h. wiederholte Realisierung der Zufallssituation („Stichprobenziehen“) unter genau definierten Bedingungen. Die Ergebnisse werden einerseits genutzt, um die eigentliche Variabilität des Zufalls zu illustrieren, andererseits sollen „Gesetze“ des Zufalls als stabiles Nebenprodukt des Zufalls sichtbar werden. Auf diesen Gesetzen basierend wird der Begriff „Restrisiko“ einsehbar.

Im dritten Abschnitt werden die sogenannten Resampling-Methoden eingesetzt, um den Zufallsfehler zu erforschen. Unter Zufallsfehler versteht man die Fluktuation irgendeiner – aus den Daten abgeleiteten – Kenngröße, die für sich genommen einen Sachverhalt messen bzw. beurteilen soll. Wenn z.B. Daten über die Wirkung eines Medikaments vorliegen – eine

¹ Erweiterte Fassung eines Artikels in den Beiträgen zum Mathematikunterricht 2005.

Gruppe mit dem Medikament behandelt, eine andere Gruppe mit Placebo – dann dient der ausgewiesene Mittelwertsunterschied im Zielmerkmal (Zeit bis zur Heilung, Anteil der Patienten, die vollständig geheilt werden, o.ä.) zur Beurteilung der Wirksamkeit des Medikaments. Könnte man wiederholt weitere Daten bekommen, so hätte man dieselbe Situation wie beim „Sampling“ und könnte die Auswirkungen des Zufalls bewerten und damit ein Vertrauensintervall für die Behandlungsunterschiede in den Gruppen angeben, oder bestimmen, ob das Medikament signifikant besser ist als Placebo. Man kann man in der Regel nicht den gesamten Versuch wiederholen. Hier setzt die Beurteilende Statistik ein: Man modelliert die Daten durch dahinterstehende Verteilungen und so weiter .. , und leitet daraus die „gewünschten“ Schlüsse ab.

„Re-Sampling“ dient nun dazu, ohne Theorie, also nur durch Simulation von wiederholten Teilstichproben aus einer schon vorhandenen Datenmenge die Genauigkeit von Schätzgrößen (hier der Behandlungsunterschied) zu beurteilen. Damit kann man Vertrauensintervalle angeben oder statistische Tests auf Signifikanz durchführen.

1. Modellierung

Ziel ist es, u.a. eine Zielgröße zu erklären, etwa die Frage zu beantworten, was Körpergewicht (einer vergleichbaren Gruppe) von Personen erklärt. Man sucht in der Phase der Systemanalyse nach erklärenden Variablen, wie Körpergröße, Geschlecht, Körpertyp, oder Ernährung im frühkindlichen Alter. Das resultierende Modell daraus könnte – im einfachsten Fall – eine (lineare) Strukturgleichung

$$\text{Gewicht} = a + b \times \text{Körpergröße}$$

sein. Anhand von Daten soll überprüft werden, ob dieses Modell eine brauchbare Beschreibung liefert und zu Prognosen für das Gewicht verwendet werden kann, wenn man die Größe einer Person kennt. Der Einfluss der Körpergröße gilt als gesichert, wenn der Koeffizient b signifikant von 0 verschieden ist. Damit hängt zusammen, ob der Korrelationskoeffizient zwischen Körpergröße und Gewicht signifikant verschieden von 0 ist. Daten selbst werden aus vielerlei Gründen vom Modell abweichen.

Einige plakative Zerlegungen der Daten geben eine Zielvorstellung, was man damit erreichen will: Sache des Statistikers ist es, aus den Daten das eigentliche Signal herauszufiltern. Durch einschlägige Methoden wird das Rauschen „unterdrückt“. In Daten ist ein verallgemeinerbares Muster enthalten, jedes Objekt zeichnet sich aber durch individuelle Abweichungen davon aus; es gilt, dieses Muster zu finden. Man spricht auch vom Modell für den verallgemeinerbaren Teil in den Daten und von den Abweichungen der einzelnen Daten von diesem Modell, genannt Residuen. Man versucht, das Modell so an die Daten anzupassen, dass die verbleibenden Residuen insgesamt möglichst klein bleiben. Das Modell bietet eine Erklärung für die Daten. Die Residuen warten noch auf eine tiefere Erklärung, sie können als Rauschen aufgefasst werden. Hier schließt sich der Kreis der angesprochenen Zerlegungen.

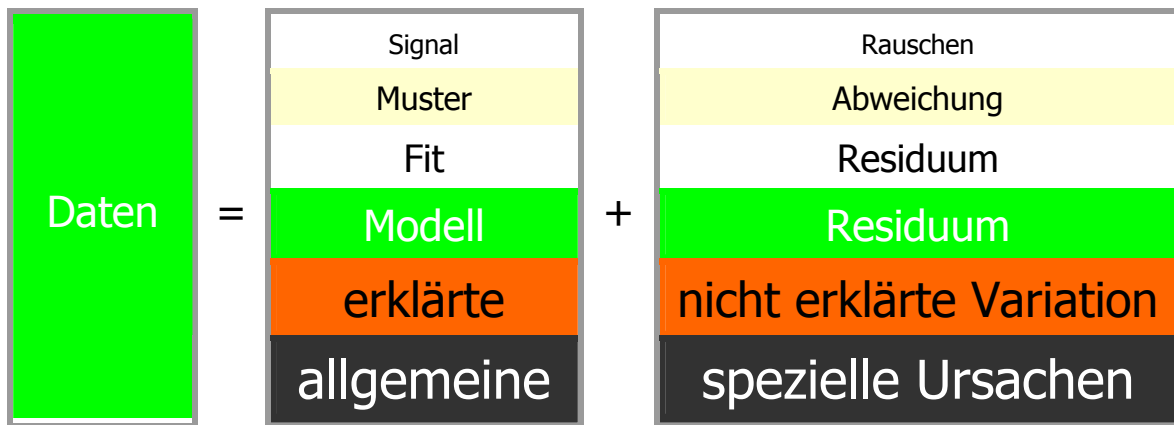


Abb. 1: Zerlegung der Daten in komplementäre Teile zur Erklärung statistischen Tuns.

In EXCEL kann man bequem zu einem Datensatz die Punktwolke mit Trendlinie (nicht nur ein lineares Modell wie oben) zeichnen sowie R^2 , das Quadrat des Korrelationskoeffizienten berechnen lassen – das erfolgt nach leicht einsehbaren Optimalitätskriterien. Für einen Datensatz von 15jährigen erhält man z.B.

$$\text{Gewicht} = 0,697 \times \text{Größe} - 67,299$$

Anstatt jetzt das Modell zu verfeinern, etwa indem man getrennte Modelle für Buben und Mädchen aufstellt, sei jetzt direkt die Bedeutung des Korrelationskoeffizienten R erschlossen. Die Modellgleichung lässt in EXCEL einfach Modelldaten und die Residuen, d.s. die Abweichungen der echten Daten von denen auf der Ausgleichsgeraden, berechnen. Wertet man nun die Spalten Daten, Modelldaten sowie Residuen statistisch aus, so ergibt sich z.B.

$$\text{Mittel der Residuen} = 0.$$

Empirisch findet man auch folgende Gesetzmäßigkeit zwischen den Varianzen der Daten und denen der Residuen:

$$\text{Varianz der Daten} \times (1-R^2) = \text{Varianz der Residuen}$$

Die Residuen entsprechen nach den Zerlegungsgleichungen aus Abb. 1 dem nicht erklärten Teil der Streuung in den Daten; ihre Varianz ist also ein Maß dafür, wie viel Variabilität nicht erklärt wird. Wenn man nun bei Kenntnis der Größe eine Voraussage auf das Gewicht macht, so kann man die ursprüngliche Voraussage verbessern:

$$\text{Mittel Gew.} \pm 2 \times \text{Stabw Gew.} \rightarrow \text{Modell-Gew. für bekannte Größe} \pm 2 \times \text{Stabw Gew.} \times \sqrt{(1-R^2)}$$

Der Faktor $\times \sqrt{(1-R^2)}$ entspricht der Verkürzung der Voraussageintervalle, spiegelt also die Verbesserung an Präzision der Kenntnisse unter Ausnutzung des Modells wider. Die folgende Tabelle 1 zeigt u.a., dass ein R von 0,83 nur zu einer Verbesserung von 44% führt – Faktor 0,56 für die Verkleinerung der Vorhersageintervalle. Wenn man weiß, dass aus Unkenntnis solcher methodischer Eigenschaften Korrelationskoeffizienten von 0,2 und darunter, weil in einer Studie als signifikant erwiesen, hochgejubelt werden, wird man die Abkürzung hier nicht unterschätzen.

2. Sampling

Mit Simulation kann man die Auswirkungen des Zufalls bzw. von Zufallsmodellen studieren und damit Näherungen für Modellrechnungen bekommen – im Prinzip kann man weite Teile der Wahrscheinlichkeitstheorie auf diese Weise empirisch vorwegnehmen.

Nr	Geschlecht	Größe	Gewicht	Lin. Modell alle	Residuen
5	0	153	38	39,33	-1,33
...
18	1	166	50	48,39	1,61
			data	fit	res
Mittel			45,15	45,15	0,00
Varianz			34,34	23,58	10,76
R			0,83		
Verkleinerungsfaktor				$\times R^2$ 0,69	$\times (1 - R^2)$ 0,31
Standardabw.			5,86	4,86	3,28
Verkleinerungsfaktor					$\times \sqrt{(1 - R^2)}$ 0,56

Tab. 1: Durch einfaches Ausrechnen von Mittelwert und Varianz der Daten für die abhängige Variable, für die Voraussagen für die abhängige Variable aus dem linearen Modell sowie für die Residuen (Fehler) dieser Voraussagen erhält man wichtige Einsichten: Die Varianz der Residuen ist gleich der Varianz multipliziert mit dem Faktor $1-R^2$; der Korrelationskoeffizient erhält eine wichtige Deutung.

Man könnte etwa illustrieren, wie variabel der Zufall ist, oder, *was* man unter der Variabilität des Zufalls verstehen soll. Oder man könnte trotz der Fluktuation des Zufalls Invarianten herauschälen, wie etwa ein Restrisiko von Entscheidungen. Man könnte die Folgen des Modells, des „was wäre, wenn“ materiell anhand simulierter Daten untersuchen. Etwa könnte man der Frage nachgehen, wie stark der Korrelationskoeffizient R fluktuiert, obwohl vom Modell her klar ist, dass er eigentlich 0 ist – damit wird es möglich, Schwellenwerte für R zu bestimmen, bei deren Überschreitung wir nicht mehr davon ausgehen, dass R doch noch 0 sein könnte., bei deren Überschreitung wir dann sagen, R ist statistisch signifikant (gesichert, von 0 verschieden). An dieser Stelle seien nur zwei kommentierte Bildfolgen wiedergegeben.

Roulette – Was ist eigentlich unter Variabilität des Zufalls aufzufassen:

Über das mathematische Gesetz der großen Zahlen gibt es eine Fülle von irreführenden Vorstellungen. Die Mathematik dahinter ist schwierig, die Aussage des Gesetzes komplex. Was wundert es einen, wenn auch durch Unterweisung die teils unsinnigen Vorstellungen

unberührt bleiben. Durch Simulation mehrerer Serien und entsprechende Aufbereitung kann man viel eher die Auffassungen klären.

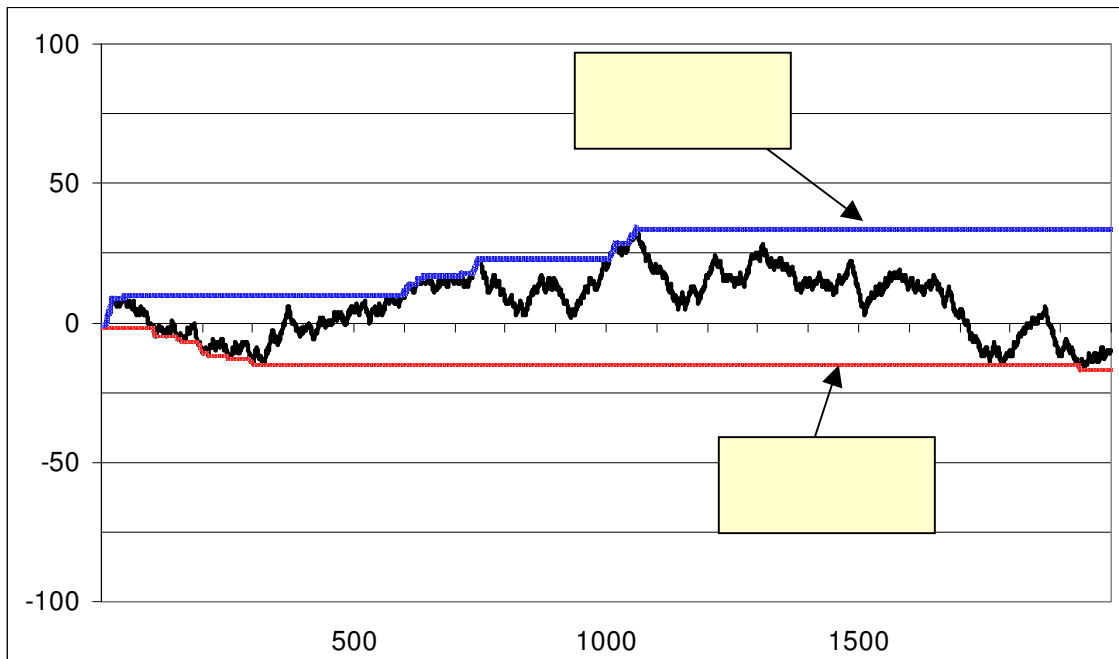


Abb. 2: Gewinnentwicklung beim Roulette – Die zackige Kurve zeigt den Saldo, die obere den maximalen Gewinn, die untere den maximalen Verlust. Der Spieler bleibt lange in der Gewinnzone, gewinnt vorübergehend sogar sehr viel – das ist die beste, unbezahlte Werbung für die Casinos. Letzten Endes jedoch bleibt bei Fortdauer des Spieles der unvermeidbare Abstieg nicht erspart.

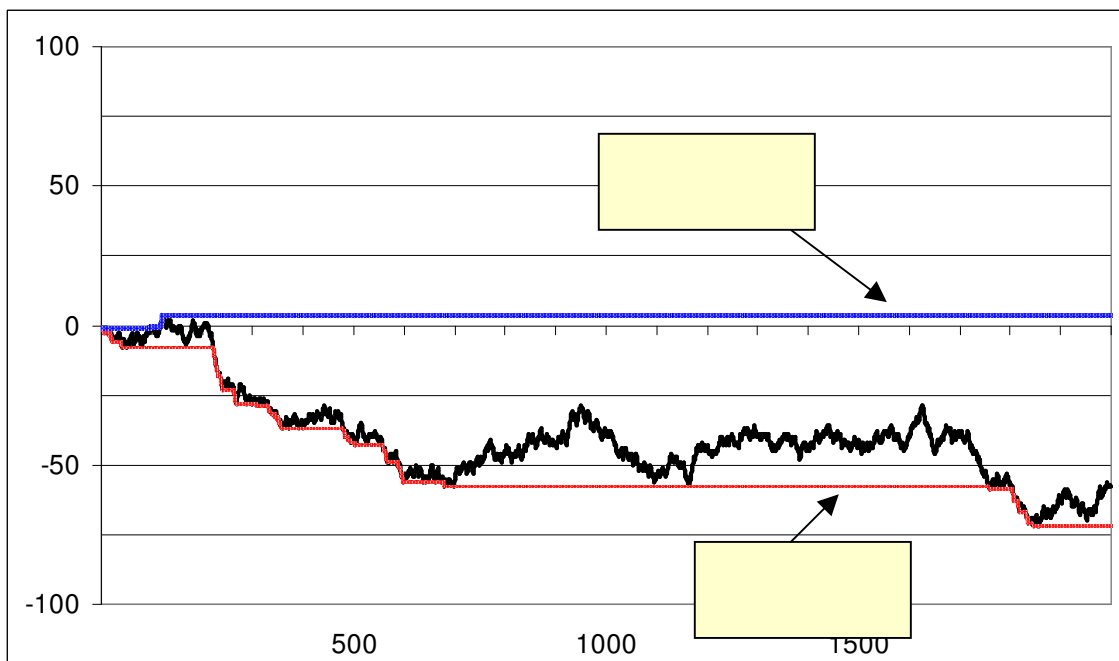


Abb. 3: Gewinnentwicklung beim Roulette – diese Serie führt ganz dramatisch in den – nicht mehr finanzierbaren – Verlust. Mit F9 erhält man in EXCEL ganz einfach eine neue Spielserie und kann damit demonstrieren, wie variabel das Spielglück doch ist.

Das Gesetz der großen Zahlen bezieht sich wohl nicht auf die Summenkurve (= Saldo des Gewinns), sondern auf die relative Häufigkeit des Gewinns. Die Einpendelung der Kurve der relativen Häufigkeiten auf eine waagrechte Linie ist bei üblicher Betrachtung (auch im Unterricht) im Zentrum des Interesses; die *echte* Variabilität zeigt jedoch erst die Wiederholung der *gesamten* Serie.

Und darauf bezieht sich die Aussage des Gesetzes: Das (Rest-)Risiko, dass die gesamte Kurve zu einem beliebigen Zeitpunkt außerhalb festgelegter Grenzen zu liegen kommt, ist kalkulierbar. Bis dahin jedoch ist ihr Verlauf sehr starken Schwankungen unterworfen. Der Wechsel von den relativen Häufigkeiten des Gewinns zum bisherigen Saldo wirkt hier wie ein Vergrößerungsglas und lässt das Ausmaß der Fluktuation (des Zufalls) trotz Einpendelung (also einer statistischen Gesetzmäßigkeit) viel besser erkennen.

Die Verteilung des „Anteils der „Erfolge“ im klassischen Bernoulli-Versuch:

Aus einer Bernoulli-Kette schätzt man mittels des Stichprobenanteils den unbekanntem Wert p für die Wahrscheinlichkeit eines „Erfolgs“, codiert mit 1. Die Schätzung wird mit zunehmender Zahl der Daten präziser; genauer hat man eine Abnahme des Schätzfehlers mit dem Faktor $1/\sqrt{n}$. Hier haben schon viele Autoren eine Elementarisierung versucht, so etwa Riemer (1991). Mit EXCEL lassen sich die Daten effizient simulieren und auswerten. Die folgenden beiden Abbildungen zeigen qualitativ den Sachverhalt der Verbesserung und ließen den Begriff des Restrisikos wiederum thematisieren.

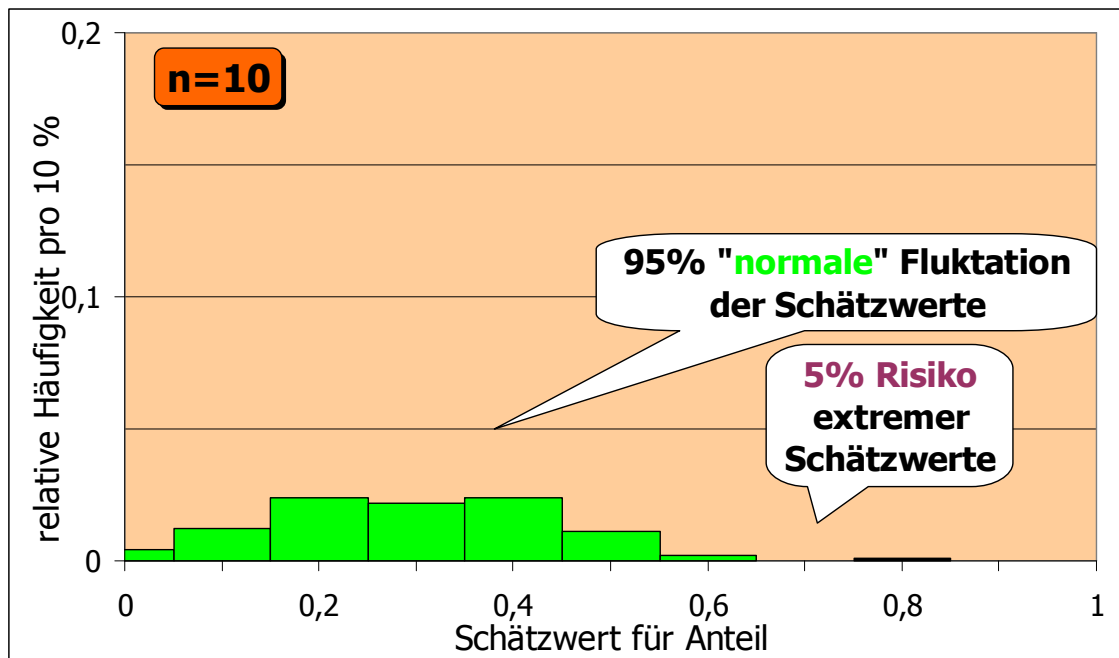


Abb. 4: Die Figur zeigt die normale Fluktuation des Anteils der Erfolge bei Wiederholung einer Stichprobe mit 10 Daten. Bei $p=0,25$ und $n=10$ ist ein Anteil der „Erfolge“ zwischen 0 und 0,65 *normal*; setzt man das als Maßstab für Prognosen für die nächste 10er Serie, so beträgt das Risiko 5%.

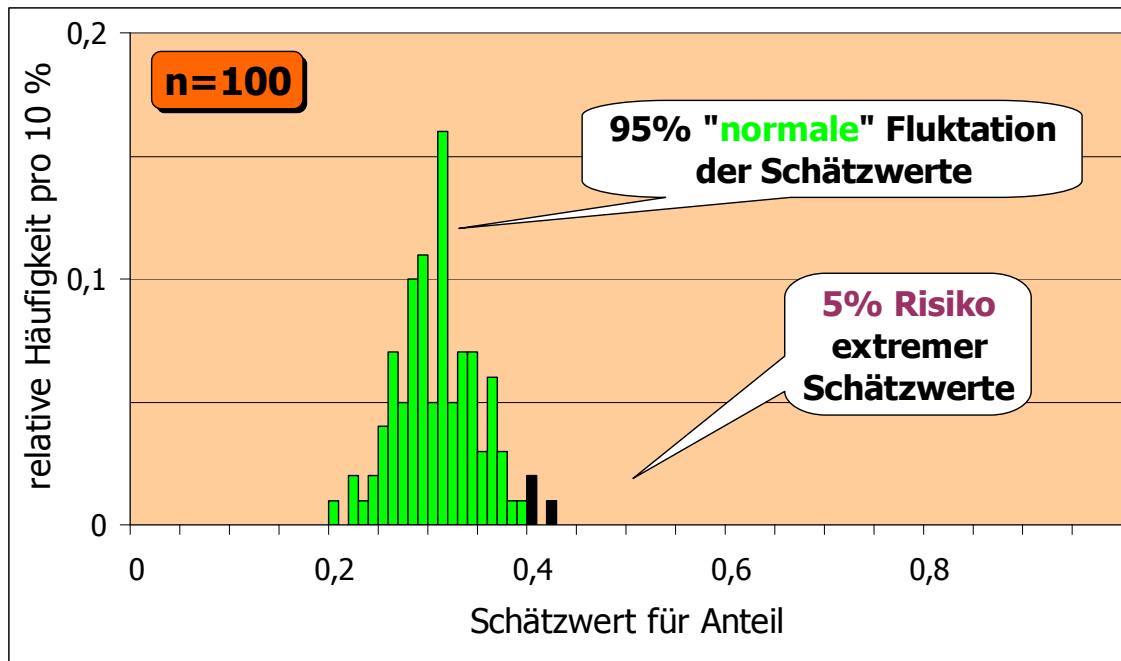


Abb. 5: Die Fluktuation des Anteils der Erfolge bei Wiederholung der Stichprobe mit „vielen“ Daten. Bei 100 Daten gilt: *normale* Serien liegen zwischen 0,2 und 0,4: dementsprechend sind bei gleichem Risiko Voraussagen für eine einzelne Serie genauer als bei etwa 10 Daten.

3. Re-sampling

Man hat Daten – eine Stichprobe – für ein Merkmal, etwa Zeiten der Belastung für ein „Projekt“, mit Mittelwert 8,9 sowie einer Standardabweichung von 10,39. Wie genau kennt man den Mittelwert für alle (=Population)? Das Vertrauensintervall berechnet sich zu $8,9 \pm 1,96 \times 10,39$ (statt 1,96 das entsprechende Quantil der t-Verteilung), siehe Tabelle 2.

Stattdessen geht man im Re-sampling so vor: Man entnimmt der vorhandenen Stichprobe – deren Verteilungsfunktion ja eine Schätzung der theoretischen Verteilungsfunktion ist – eine weitere Stichprobe (mit Wiederholung). Dieses 1. Resampling ergibt im Tabellenblatt unten ein Mittel von 7,7 – ein Hinweis über die Genauigkeit der Schätzung von 8,9 aus den Urdaten. Wie man in EXCEL die Stichprobe „zieht“, lese man in Christie (2004) nach. Mit F9 kann man den Zufall bequem „erneuern“, die Zahl 7,7 ändert entsprechend der neuen Zufallsauswahl. Man erhält konkret vor Augen geführt, wie genau der Ausgangswert von 8,9 ist. Man könnte nun beliebig oft F9 drücken, die Zwischenergebnisse speichern und somit die resampelte Verteilung der wiederholten Mittelwerte gewinnen. Diese Verteilung kann man mit Methoden der beschreibenden Statistik untersuchen, so kann man ihren 2,5%- bzw. 97,5%-Punkt ermitteln – 4,38 bzw. 17,58, womit man ein zentrales 95%-Intervall für die Fluktuation des Mittelwerts bei resampelten Stichproben erhält, das R(esampling)-Vertrauensintervall. (Oder man berechnet ein Intervall mit 2 Standardabweichungen um den Mittelwert dieser resampelten Mittelwerte.)

Das Resampling der Stichprobe verkürzt man effizient mit einer sogenannten Mehrfachoperation aus dem Menü Daten>Tabelle; für Details siehe wieder Christie (2004), für das EXCEL-Blatt siehe Tabelle 2. Resampling funktioniert für jedes Merkmal, so etwa auch für die Differenz von Mittelwerten aus zwei verschiedenen Gruppen. Man kann das resampelte Intervall auch mit Hypothesen vorweg vergleichen, kommt also auch ans Testen heran, siehe Tabelle 3. Speziell kann man auch prüfen, ob der Korrelationskoeffizient einer Stichprobe signifikant von 0 verschieden ist, siehe Tabelle 4.

4. Re-sumé

Mit Studierenden aus verschiedensten Studienrichtungen, speziell aus BWL konnte der Autor ausgesprochen gute Erfahrungen machen. Das angestrebte tiefere Verständnis für die Möglichkeiten und Grenzen, auch konkret das Verstehen der Standardprozeduren von Vertrauensintervallen wie statistischen Tests – insbesondere des Tests auf Unterschiede in verschiedenen Gruppen – war da. Es wurde nicht mehr durch die nicht erreichbare Mathematik behindert. Die Schwierigkeiten mit der induktiven Logik mit dem „was wäre, wenn“ – Szenario-Charakter waren weg. Die künstlichen Szenarien waren keine Gedankenexperimente mehr, sondern materiell fassbar, es waren konkrete Daten über die Auswirkungen des „wenn“ – man konnte „was wäre“ angreifen und untersuchen.

Das Re-Sampling aus der schon vorhandenen Stichprobe statt des Ziehens neuer Stichproben machte kein Problem. Auch das Argument, dass der Fehler einer schon vorhandenen Stichprobe – wenn sie nicht-repräsentativ ist – sich dadurch „hochschaukelt“, ist in Wirklichkeit kein Nachteil. Denn, wenn das Design der Untersuchung schon einmal zu einer so schlechten Stichprobe geführt hat, dann wird es diese „Neigung“ auch bei einer echten Wiederholung der Stichprobe haben. Und: Der Fehler der vorhandenen Stichproben multipliziert sich dann auch mit der klassischen Auswertung der Daten auf Basis der üblichen Modelle. Im übrigen sind die Re-Sampling-Methoden in der Angewandten und der Theoretischen Statistik heute oft das Mittel der Wahl. Resampling-Methoden revolutionieren den Zugang zur gesamten Beurteilenden Statistik. Man kann die erforderlichen Simulationen in einer Spezialsprache realisieren. Für den Hausgebrauch reicht jedoch EXCEL.

Bleibt noch, auf das Werkzeug EXCEL – oder eine andere Tabellenkalkulation – einzugehen: Nicht alles wird lösbar, nicht alle Problemstellungen lassen sich einfach in ein Re-Sampling-Design umformulieren. Zeit geht auch mit trivialen Computer-Fragen verloren. Der Arbeitsstil ist empirisch-explorativ, was sehr vielen Lernenden entgegenkommt. Man probiert spielerisch und sieht die Konsequenzen direkt und nicht in abstrakten Größen verklausuliert. Das hängt auch mit der begrifflichen Einfachheit der Verfahren zusammen, die zudem noch auf dem Computer materiell repräsentiert und damit nachvollziehbar werden.

Anmerkung: Die mit ausführlichen Kommentaren ausgestatteten EXCEL-Files, welche auch die statistische Vorgangsweise sowie die Realisierung in EXCEL erläutern, sind vom Autor oder aus dem Internet erhältlich.

Tab. 2: Dieses EXCEL-Blatt berechnet das klassische Vertrauensintervall für den Mittelwert und durch Resampling die analogen Intervalle – mit F9 lässt sich das Resampling bequem erneuern; die Schwankungen der R-Intervalle geben einen zusätzlichen Eindruck von der Genauigkeit der ermöglichten Aussagen über den Mittelwert.

Genauigkeit von Schätzungen für den Mittelwert

Man hat eine Stichprobe mit dem Mittelwert für ein Merkmal. Wie genau kennt man den Mittelwert für ALLE (=Population)?

Urdaten		1. Resampling		Wiederholte Mittelwerte		Verteilung der wiederholten Mittelwerte		
Nr	Zeiten	Nr	Zeiten	Daten>Tabelle		Kennziffern		
1	12	9	1		7,70	Mittel	St-abw.	
2	2	5	19		8,60	9,87	3,13	
3	6	1	12		18,20	2-s Intervall aus resampelten Mitteln		
4	2	8	4		10,50	3,74	16,00	
5	19	1	12		8,60	Resampling Vertrauensintervall		
6	5	4	2		8,50	unten	oben	
7	34	9	1		12,90	4,38	17,58	
8	4	1	12		4,60	95% Vertrauensintervall - klassisch		
9	1	1	12		9,10	unten	oben	Präzision
10	4	4	2		5,70	2,33	15,47	6,57
					9,60			
					6,90			
					10,20			
					9,50			
					13,10			
n	Mittel	Mittel						
10	8,90	7,70						
	St-abw.							
	10,39							

Tab. 3: Dieses EXCEL-Blatt berechnet das klassische Vertrauensintervall für die Differenz zweier Mittelwerte und durch Resampling die analogen Intervalle – mit F9 lässt sich das Resampling bequem erneuern; die Schwankungen der R-Intervalle geben einen zusätzlichen Eindruck von der Genauigkeit der ermöglichten Aussagen über die Differenz.

Absichern von Unterschieden im Mittelwert zwischen Versuchs- und Kontrollgruppe

Ist eine Behandlung wirksam hinsichtlich der Werte einer Zielvariablen ? Versuchsgruppe VG erhält eine Behandlung - Kontrollgruppe KG Placebo. Ist der Unterschied im Mittelwert (die Differenz) mit dem Spiel des Zufalls zu erklären ?

Urdaten		1. Resampling				Wiederholte Differenzen		Verteilung der wiederholten Differenzen		
Nr	E	random		Nr	E	Daten>Tabelle	Kennziffern			
1	69,0	0,532	neue VG	5	77,5	4,25	Mittel	St-abw.		
2	24,0	0,025		12	32,5	-7,08	-0,37	19,99		
3	63,0	0,427		9	36,0	3,42				
4	87,5	0,481		6	40,0	22,58				
5	77,5	0,608		3	63,0	12,42				
6	40,0	0,740		2	24,0	3,08				
7	9,0	0,765	neue KG	1	69,0	-10,25	R-Intervall - Basis Diff=0			
8	12,0	0,428		8	12,0	6,08	unten	oben	Präzision	
9	36,0	0,543		4	87,5	1,25	-42,65	34,38	38,52	
10	77,5	0,402		10	77,5	15,58	R-Rang der beob. Differenz			
11	-7,5	0,449		7	9,0	8,75	Differenz	p %		
12	32,5	0,343		11	-7,5	37,58	33,58	6,1		
						...	95% Vertrauensintervall			
n A	Mittel A	St-Abw A		Mittel A	unten	oben	Präzision	
6	60,17	23,868		45,50	-0,47	67,64	34,05	
n B	Mittel B	St-Abw B		Mittel B	2,50	64,67	31,09	
6	26,58	29,664		41,25				
	Differenz			Differenz				
	33,58			4,25				

Tab. 4: Dieses EXCEL-Blatt wählt aus dem vorhandenen Datensatz wiederholt Datenpaare aus; man erhält somit eine erste resampelte, neue Stichprobe. Davon berechnet man den Korrelationskoeffizienten R. Die Wiederholung der Auswahl mit F9 lässt ahnen, wie sehr der Korrelationskoeffizient schwankt, oder umgekehrt, wie verlässlich sein Wert in den Urdaten ist. Die systematische Wiederholung ergibt ein Resampling-Intervall für R.

Genauigkeit von Schätzungen für den Korrelationskoeffizienten

Man hat eine Stichprobe mit dem Korrelationskoeffizienten für ein 2dim. Merkmal. Wie genau kennt man den Korrelationskoeffizienten für ALLE = Population?

Urdaten		
Nr	Ca	M
1	105	1247
2	17	1668
3	5	1466
4	14	1800
5	18	1609
6	10	1558
7	15	1807
8	78	1299
9	10	1637
10	84	1359
11	73	1392
12	12	1755
13	78	1307
R		-0,85

1. Resampling		
Nr	Ca	M
9	10	1637
4	14	1800
9	10	1637
9	10	1637
8	78	1299
11	73	1392
11	73	1392
7	15	1807
5	18	1609
1	105	1247
6	10	1558
2	17	1668
11	73	1392
R		-0,91

Wiederholte Korrelationen R	
Daten > Tabelle	
	-0,91
	-0,76
	-0,95
	-0,87
	-0,79
	-0,92
	-0,93
	-0,84
	-0,85
	-0,83
	-0,80
	...
	...
	...

Verteilung der wiederholten R	
-------------------------------	--

Kennziffern	
Mittel	St-abw.
-0,86	0,07

2-s Intervall aus resampelten R	
-1,00	-0,72

Resampling-Vertrauensintervall	
unten	oben
-0,96	-0,75

Literatur

- Ageel, M.I.: Gibt es ein Dreieck? *Stochastik in der Schule* 24 (2004), Heft 1, 2-3.
- Borovcnik, M.: EXCEL-Files für den Unterricht in Stochastik: <http://www.uni-klu.ac.at/stochastik.schule/> unter Links.
- Borovcnik, M., Peird, R.: Probability. In: Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C.: *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer 1996, 239-288.
- Borovcnik, M.: Statistik und Tabellenkalkulation. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim: Franzbecker, 2001, 125-128.
- Borovcnik, M.: Nützliche Gesetze über den Zufall – Experimente mit EXCEL. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik der Österr. Math. Ges. 32 (2001), 1-22.
- Borovcnik, M.: EXCELLent Statistics – Statistik mit Unterstützung von Tabellenkalkulation. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik der Österr. Math. Ges. 33 (2002).
- Borovcnik, M., Kautschitsch, H.: Technology in Mathematics Teaching – Plenary lectures and Strands. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik 25. Öbv & Hpt, Vienna 2002 – auch auf CD-ROM.
- Borovcnik, M., Kautschitsch, H.: Technology in Mathematics Teaching – Working Groups and Special Groups. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik 26. Öbv & Hpt, Vienna 2002– auch auf CD-ROM.
- Borovcnik, M.: Abkürzungen zur Beurteilenden Statistik. Beiträge zum Mathematikunterricht 2005, Hildesheim: Franzbecker 2005.
- Borovcnik, M.: Probabilistic and Statistical thinking. Proceedings of the working Group on Stochastic thinking at CERME 4, Sant Feliu de Guíxols, 2005.
- Christie, D.: Resampling mit Excel. *Stochastik in der Schule* 24 (2004), Heft 3, 22-27.
- Hunt, N.: Piktogramme mit Microsoft Excel. *Stochastik in der Schule* 21 (2001), Heft 2, 18-20.
- Hunt, N.: Punkte-Diagramme und Stengel-Diagramme mit EXCEL. *Stochastik in der Schule* 22 (2002), Heft 3, 8-9.
- Neuwirth, E.: <http://sunsite.univie.ac.at/mailman/listinfo/Improve-excel>
- Neuwirth, E.: Visualisieren von Korrelation mit Streudiagrammen. *Stochastik in der Schule* 11 (1991), Heft 2, 43-53.
- Neuwirth, E., Arganbright, D.: *The Active Modeler: Mathematical Modeling with Microsoft Excel*. Brooks/Cole 2004.
- Reckelkamm, B.: Der Tanz der Residuen - Erarbeitung statistischer Grundbegriffe mit Hilfe von EXCEL. *Stochastik in der Schule* 24 (2004), Heft 3, 14-21.
- Riemer, W.: Das 'Eins durch Wurzel aus n'- Gesetz. - Einführung in statistisches Denken auf der Sekundarstufe I. *Stochastik in der Schule* 11 (1991), Heft 3, 24-36.
- Riemer, W.: *Stochastische Probleme aus Elementarer Sicht. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik*, Bd. 18, Mannheim: B.I. Wissenschaftsverlag 1991.
- Spreadsheets in Education: <http://www.sie.bond.edu.au/>
- Velleman, P.F.: *ActivStats for Excel 2003-2004 Release*. Boston: Addison-Wesley 2004.
- Whingham, D.: Normalverteilungen mit EXCEL. *Stochastik in der Schule* 19 (1999), Heft 2, 28-31.